Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación
Nivel Superior
Prueba 1

8 de mayo de 2023

Zona A tarde | **Zona B** mañana | **Zona C** tarde

Número de convocatoria del alumno

2 horas

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas.
- Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.

2223 – 7221

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 7]

Un jugador de baloncesto lanza el balón. La altura a la que está el balón se puede modelizar mediante

$$h(t) = -4{,}75t^2 + 8{,}75t + 1{,}5\,,\ t \geq 0\,,$$

donde h es la altura sobre el nivel del suelo a la que está el balón (en metros) y t es el tiempo transcurrido (en segundos) desde que se lanzó el balón.

(a) Halle el tiempo que tarda el balón en alcanzar la altura máxima. [2]

(b) Suponiendo que ningún jugador coge el balón, halle el tiempo que tarda el balón en tocar el suelo. [2]

Hay otro jugador que coge el balón justo cuando está a una altura de $1{,}2$ metros.

(c) Halle el valor de t cuando este otro jugador coge el balón. [2]

(d) Escriba una limitación que tenga el uso de $h(t)$ para modelizar la altura del balón. [1]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. [Puntuación máxima: 4]

Una empresa que es dueña de muchos restaurantes quiere averiguar si existen diferencias en la calidad de los platos que se preparan para tres tipos de comidas distintas: desayuno, almuerzo y cena.

El equipo de control de calidad de la empresa elige al azar 500 platos para analizarlos. La calidad de cada plato se clasifica como perfecta, satisfactoria o deficiente. Los datos recogidos están resumidos en la siguiente tabla.

		Calidad			
		Perfecta	**Satisfactoria**	**Deficiente**	**Total**
Comida	**Desayuno**	101	124	7	**232**
	Almuerzo	68	81	5	**154**
	Cena	35	69	10	**114**
	Total	**204**	**274**	**22**	**500**

Se realiza una prueba χ^2 a un nivel de significación del 5% para determinar si hay pruebas significativas de que exista una diferencia en la calidad de los platos que se preparan para esas tres tipos de comidas.

Para esta prueba, el valor crítico es $9{,}488$.

Las hipótesis para esta prueba son las siguientes:

H_0: La calidad de los platos y el tipo de comida son independientes.
H_1: La calidad de los platos y el tipo de comida no son independientes.

(a) Halle el estadístico χ^2. [2]

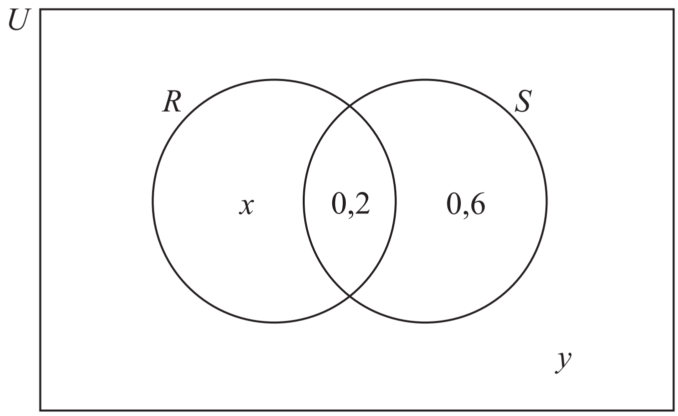
(b) Indique, aportando una justificación, cuál es la conclusión de esta prueba. [2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 2: continuación)

3. [Puntuación máxima: 7]

En el siguiente diagrama de Venn se representan dos sucesos independientes: R y S.
Los valores que aparecen en el diagrama indican probabilidades.



(a) Halle el valor de x. [3]

(b) Halle el valor de y. [2]

(c) Halle $\mathrm{P}(R' \mid S')$. [2]

4. [Puntuación máxima: 6]

Angel ha ahorrado $520\,\$$. Angel se plantea invertir ese dinero metiéndolo durante 5 años en un banco. El banco le ofrece un tipo de interés anual del $1{,}2\,\%$ compuesto trimestralmente.

(a) Calcule cuánto dinero tendría Angel al final de esos 5 años si metiera el dinero en el banco. Dé la respuesta redondeando a dos cifras decimales. [3]

En lugar de invertir el dinero, Angel decide comprarse un teléfono que cuesta $520\,\$$. Al final de esos 5 años, el teléfono tendrá un valor de $30\,\$$. Se puede suponer que la tasa de depreciación anual es constante.

(b) Calcule la tasa de depreciación anual del teléfono. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

5. [Puntuación máxima: 6]

Las longitudes de las semillas procedentes de un árbol de mangos en particular siguen aproximadamente una distribución normal de una media de $4\,\text{cm}$ y desviación típica igual a $0{,}25\,\text{cm}$.

Se coge al azar una semilla de este árbol de mangos.

(a) Calcule la probabilidad de que la longitud de esa semilla sea menor que $3{,}7\,\text{cm}$. [2]

Se sabe que el $30\,\%$ de las semillas tienen una longitud mayor que $k\,\text{cm}$.

(b) Halle el valor de k. [2]

Para una semilla de longitud d cm elegida al azar, $\mathrm{P}(4 - m < d < 4 + m) = 0{,}6$.

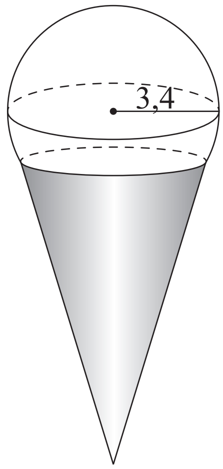
(c) Halle el valor de m. [2]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

6. [Puntuación máxima: 5]

Ruhi se compra una bola de helado que tiene forma de esfera de $3{,}4\,\text{cm}$ de radio. El helado se sirve en un cono; y se puede suponer que $\frac{1}{5}$ del volumen del helado está metido dentro del cono. Toda esta información se representa en la siguiente figura.

la figura no está dibujada a escala



(a) Calcule el volumen de helado que no está dentro del cono. [3]

El cono tiene una generatriz de $11\,\text{cm}$ y un radio de $3\,\text{cm}$.

El exterior del cono está cubierto de chocolate.

(b) Calcule el área de la superficie del cono que está cubierta de chocolate. Dé la respuesta redondeando al número entero de cm^2 más próximo. [2]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

7. [Puntuación máxima: 6]

Akar consigue un trabajo en Australia y, para ir a trabajar, tiene que viajar a diario desde Wollongong a Sídney, ida y vuelta. Va al trabajo 28 días consecutivos y, por lo tanto, hace 56 viajes. Akar hace todos los viajes en autobús.

La probabilidad de que, en un viaje dado, consiga un asiento en el autobús es $0{,}86$.

(a) Determine, para esos 56 viajes, el número esperado de viajes en los que Akar consigue un asiento en el autobús. [1]

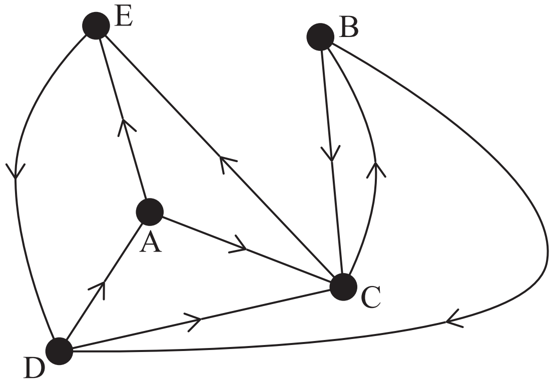
(b) Halle la probabilidad de que Akar consiga un asiento en al menos 50 de los viajes que hace en esos 28 días. [3]

La probabilidad de que Akar consiga un asiento en un máximo de n viajes es al menos $0{,}25$.

(c) Halle el valor más pequeño posible de n. [2]

8. [Puntuación máxima: 7]

El siguiente grafo no ponderado y orientado representa, de manera simplificada, la red de carreteras de una isla que conecta cinco pequeños pueblos identificados con las letras A a E.



(a) Construya la matriz de adyacencia $(\boldsymbol{M})$ correspondiente a esta red. [3]

Beatriz, la conductora del autobús, empieza en el pueblo E y conduce por siete pueblos, de modo que el séptimo pueblo es A.

(b) (i) Determine cuántas rutas distintas podría haber seguido Beatriz para ir de E a A.

(ii) Describa una de esas posibles rutas que podría haber seguido Beatriz, enumerando —en orden— todos los pueblos por los que pasaría. [4]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

9. [Puntuación máxima: 9]

En un club de atletismo, Sung-Jin realiza una prueba para determinar si existe alguna relación entre la edad del atleta y su mejor tiempo en la carrera de $100\,\text{m}$. Se elige al azar ocho atletas, cuyos datos se muestran a continuación.

Atleta	A	B	C	D	E	F	G	H
Edad (años)	13	17	22	18	19	25	11	36
Tiempo (segundos)	13,4	14,6	13,4	12,9	12,0	11,8	17,0	13,1

Sung-Jin decide calcular el coeficiente de correlación por rangos de Spearman para este conjunto de datos.

(a) Complete la tabla de rangos. [2]

Atleta	A	B	C	D	E	F	G	H
Rango de edades			3					
Rango de tiempos							1	

(b) Calcule el coeficiente de correlación por rangos de Spearman (r_s). [2]

(c) Interprete este valor de r_s en el contexto de la pregunta. [1]

(d) Sugiera una razón matemática por la cual Sung-Jin puede que haya decidido no utilizar el coeficiente de correlación momento-producto de Pearson con los datos de la tabla original. [1]

(e) (i) Halle el coeficiente de determinación para los datos de la tabla original.

(ii) Interprete este valor en el contexto de la pregunta. [3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 9: continuación)

10. [Puntuación máxima: 6]

Una empresa de chocolates tiene previsto elaborar barras de chocolates con sabores especiales. Hacen una encuesta entre 246 personas para determinar si hay alguna preferencia particular por alguno de los sabores.

En la siguiente tabla se muestra la información que han recogido.

Chile picante	Crujiente de almendra	Té con especias	Jengibre y lima
75	59	46	66

Se lleva a cabo una prueba de bondad de ajuste χ^2 a un nivel de significación del 5% sobre los datos.

El valor crítico para esta prueba es $7,82$.

(a) Indique la hipótesis nula y la hipótesis alternativa para esta prueba. [2]

(b) Realice la prueba y dé una conclusión en contexto. [4]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

11. [Puntuación máxima: 6]

Se combinan dos fuentes eléctricas de corriente alterna (AC) de igual frecuencia.

El voltaje de la primera fuente se puede modelizar mediante la ecuación $V = 30\,\mathrm{sen}(t + 60^\circ)$.

El voltaje de la segunda fuente se puede modelizar mediante la ecuación $V = 60\,\mathrm{sen}(t + 10^\circ)$.

(a) Determine el voltaje máximo de la combinación de esas dos fuentes. [2]

(b) Utilizando la calculadora de pantalla gráfica, halle una ecuación que exprese el voltaje combinado; dé la respuesta en la forma $V = V_0\,\mathrm{sen}(at + b)$, donde a, b y V_0 son constantes, $a > 0$ y $0^\circ \le b < 180^\circ$. [4]

12. [Puntuación máxima: 5]

Un globo esférico se infla de modo tal que su volumen va aumentando a un ritmo de $15\,\text{cm}^3\,\text{s}^{-1}$.

(a) Halle el radio que tiene el globo cuando su volumen es $288\,\pi\,\text{cm}^3$. [2]

(b) A partir de lo anterior (o de cualquier otro modo alternativo), halle la razón de cambio del radio en ese instante. [3]

13. [Puntuación máxima: 7]

Las matrices $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ and $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ representan dos transformaciones.

Un triángulo T se transforma mediante $\boldsymbol{P}$ y, a continuación, esta imagen se transforma mediante $\boldsymbol{Q}$ para dar lugar a un nuevo triángulo T'.

(a) Halle la matriz que representa toda la transformación $T' \to T$, con la que se deshace la transformación descrita anteriormente. [4]

El área de T' es igual a $273\,\text{cm}^2$.

(b) Utilizando la respuesta dada en el apartado (a) (o de cualquier otro modo alternativo), determine el área de T. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

14. [Puntuación máxima: 8]

En esta pregunta, $\boldsymbol{i}$ denota un vector unitario que apunta al este y $\boldsymbol{j}$ denota un vector unitario que apunta al norte.

Dos barcos (A y B) se están moviendo ambos con velocidad constante.

El vector de posición del barco A, en el tiempo t horas, es $\boldsymbol{r}_A = (1 + 2t)\boldsymbol{i} + (3 - 3t)\boldsymbol{j}$.

El vector de posición del barco B, en el tiempo t horas, es $\boldsymbol{r}_B = (-2 + 4t)\boldsymbol{i} + (-4 + t)\boldsymbol{j}$.

(a) Halle el rumbo con la que está navegando el barco A. [3]

(b) Halle el valor de t cuando el barco B está directamente al sur del barco A. [2]

(c) Halle el valor de t cuando el barco B está directamente al sureste del barco A. [3]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

15. [Puntuación máxima: 6]

De un estante del supermercado se toma una muestra aleatoria compuesta por ocho paquetes de café en grano Apollo.

Los pesos del café en grano que contiene cada paquete son los siguientes:

$$222\,\text{g} \quad 226\,\text{g} \quad 221\,\text{g} \quad 228\,\text{g} \quad 227\,\text{g} \quad 225\,\text{g} \quad 222\,\text{g} \quad 223\,\text{g}$$

(a) (i) Halle un estimador sin sesgo de la media del peso del café en grano que contiene un paquete de café Apollo.

(ii) Calcule un intervalo de confianza del 95% para la media de la población. Dé la respuesta redondeando a cuatro cifras significativas. [3]

(b) Indique una suposición que haya hecho para que ese intervalo sea válido. [1]

(c) En la etiqueta de cada paquete hay una descripción que incluye la frase: "contiene $226\,\text{g}$ de café en grano".

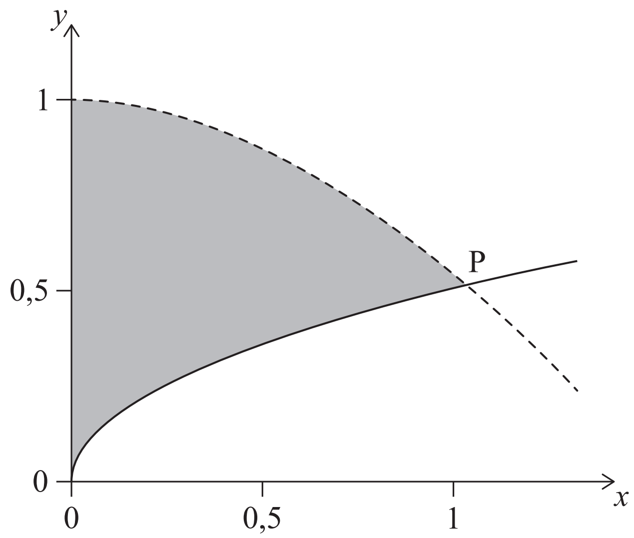
Utilizando la respuesta del apartado (a)(ii), comente brevemente la afirmación que se hace en la etiqueta. [2]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

16. [Puntuación máxima: 9]

La figura que aparece a continuación muestra una parte de las curvas of $y = \cos x$ e $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2}$.

P es el punto de intersección de las dos curvas.



(a) Utilice la calculadora de pantalla gráfica para hallar las coordenadas de P. [2]

La región sombreada se rota 360° **alrededor del eje *y***, generando así el volumen de revolución V.

(b) Exprese V como la suma de dos integrales definidas. [5]

(c) A partir de lo anterior, halle el valor de V. [2]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

17. [Puntuación máxima: 6]

Considere la siguiente ecuación diferencial:

$$\left(x^2+1\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x}{2y-2}\text{, para } x\geq 0,\ y\geq 1,$$

donde $y=1$ para $x=0$.

(a) Explique por qué no se puede utilizar el método de Euler para hallar un valor aproximado de y para $x=0{,}1$. [1]

(b) Resolviendo la ecuación diferencial, muestre que $y=1+\sqrt{\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{2}}$. [4]

(c) A partir de lo anterior, deduzca el valor de y para $x=0{,}1$. [1]

Fuentes:

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.